

SOLUSI

1.

A. Waktu bola untuk jatuh diberikan oleh : $t_A = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

Jarak d yang dibutuhkan adalah $d = v_0 t_A = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$

B.

i. Karena bola tidak slip sama sekali dan tumbukan lenting sempurna maka energi mekanik sistem kekal.

ii. Gaya gesek arahnya ke sumbu x negatif (melawan arah gerak relatif bola)

iii. Impuls gaya gesek: $I_A = m v_0 - m v'_{A,x}$.

iv. Impuls sudut dari gaya gesek: $I_A R = \frac{2}{5} m R^2 \omega'_A$

C. Hukum kekekalan energi: $\frac{1}{2} m (v_0^2 + v_{A,y}^2) = \frac{1}{2} m (v'^2_{A,x} + v'^2_{A,y}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m R^2 \omega'^2_A$

Karena tumbukan lenting sempurna, kecepatan bola dalam arah vertikal tidak berubah sehingga $v_{A,y} = v'_{A,y}$.

Sederhanakan, didapat : $v_0^2 = v'^2_{A,x} + \frac{2}{5} R^2 \omega'^2_A$

Gunakan hubungan impuls: $I_x = m(v_0 - v'_{A,x}) = \frac{2}{5} m R \omega'_A$,

didapat $v_0^2 - v'^2_{A,x} = \frac{2}{5} \left(\frac{5}{2} (v_0 - v'_{A,x}) \right)^2$

atau $(v_0 - v'_{A,x})(v_0 + v'_{A,x}) = \frac{5}{2} (v_0 - v'_{A,x})^2$

Ada 2 solusi: $v'_{A,x} = v_0$ dan $v'_{A,x} = \frac{3}{7} v_0$

Solusi yang benar adalah solusi kedua: $v'_{A,x} = \frac{3}{7} v_0$ dengan $\omega'_A = \frac{5}{2R} (v_0 - v'_{A,x}) = \frac{10v_0}{7R}$

D. Untuk menghitung posisi tumbukan kedua di B, kita perlu menghitung waktu agar bola bisa menyentuh keping atas K₁. Persamaan yang digunakan hanyalah persamaan gerak parabola:

$$h = v_{A,y} t_B - \frac{1}{2} g t_B^2$$

dengan $v_{A,y} = \sqrt{2gH}$

Selesaikan persamaan kuadrat ini, didapat:

$$t_B = \frac{\sqrt{2gH} \pm \sqrt{2gH - 2gh}}{g} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{h}{H}} \right)$$

Ambil solusi negatif dan masukkan harga $h = 0,75 H$: $t_B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2H}{g}}$

Jarak horizontal yang ditempuh bola adalah $x_B = v_x t_B = \frac{3}{7} v_0 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{3}{14} d$, sehingga dengan

koordinat $B(\lambda d, h) = B(d + x_B, h) = B\left(\frac{17}{14} d, h\right)$ diperoleh $\lambda = \frac{17}{14}$

E. Proses tumbukan kedua mirip dengan proses tumbukan pertama. Yang perlu diperhatikan adalah ada perubahan persamaan impuls-nya. Karena rotasi bola terlalu cepat ($\omega'_A R > v'_{A,x}$) maka gaya gesek berusaha mengurangi kecepatan rotasi sehingga gaya gesek arahnya juga ke sumbu x negatif.

F. Besarnya impuls gaya gesek diberikan oleh $I_B = m \left(\frac{3}{7} v_0 - v'_{B,x} \right)$

dengan $v'_{B,x}$ adalah kecepatan bola setelah tumbukan.

Impuls sudut diberikan oleh $I_B R = \frac{2}{5} m R^2 \left(\frac{10}{7} \frac{v_0}{R} - \omega'_B \right)$

dengan ω'_B adalah kecepatan sudut bola setelah tumbukan.

Hukum kekekalan energi:

$$E = \frac{1}{2} m (v'^2_{B,x} + v'^2_{B,y}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m R^2 \omega'^2_B = \frac{1}{2} m (v^2_{B,x} + v^2_{B,y}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m R^2 \omega^2_B$$

Kecepatan dalam arah x : $v_{B,x} = v'_{A,x} = \frac{3}{7} v_0$ dan kecepatan sudut: $\omega_B = \omega'_A = \frac{10 v_0}{7 R}$

Karena tumbukan lenting sempurna, berlaku: $v_{B,y} = v'_{B,y}$

Dari hubungan impuls, didapat $\omega'_B = \frac{5}{2 R} \left(\frac{1}{7} v_0 + v'_{B,x} \right)$

Masukkan semua informasi ini ke persamaan energi, didapat: $v'^2_{B,x} + \frac{10}{49} v'_{B,x} v_0 - \frac{93}{343} v_0^2 = 0$

Faktorkan, dengan memperhatikan bahwa salah satu solusi adalah solusi untuk kasus tidak terjadi

tumbukan: $\left(v'_{B,x} - \frac{3}{7} v_0 \right) \left(v'_{B,x} + \frac{31}{49} v_0 \right) = 0$

Sehingga didapat $v'_{B,x} = -\frac{31}{49}v_0$ dan $\omega'_B = -\frac{60}{49}\frac{v_0}{R}$

G. Waktu untuk bola bergerak dari B ke C sama dengan waktu bola bergerak dari A ke B. Jarak yang

ditempuh bola adalah $d_{BC} = v'_{B,x} \frac{t_A}{2} = -\frac{31}{98}d$.

Artinya jarak titik C dari titik asal O(0,0) adalah $d + x_B + d_{BC} = d + \frac{3}{14}d - \frac{31}{98}d = \frac{44}{49}d$, sehingga

koordinat titik C adalah $\left(\frac{44}{49}d, 0\right)$

2. Oleh karena tiap partikel dalam tali memiliki kelajuan yang sama, maka energi kinetik tali adalah

$$E_k = \frac{1}{2} M v^2$$

Pada saat ujung bebas tali sudah tergeser sejauh x dari posisi awal, energi potensial pegas adalah

$$E_p^{\text{pegas}} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{Mg}{2L} \right) x^2 = \frac{Mg x^2}{4L}$$

Sementara itu, energi potensial gravitasi tali relatif terhadap posisi awal adalah

$$E_p^{\text{tali}} = - \left(\frac{M}{4L} x \right) g \left(L + \frac{1}{2} x \right) = - \frac{Mg x}{8L} (2L + x)$$

sehingga energi potensial total sistem adalah

$$E_p = E_p^{\text{pegas}} + E_p^{\text{tali}} = \frac{Mg x}{8L} (x - 2L)$$

A. Persamaan kekekalan energi mekanik E tali adalah

$$\frac{1}{2} M v^2 + \frac{Mg}{8L} x(x - 2L) = E$$

Diketahui pada saat awal ($t = 0$), $x = 0$, dan $v = 0$ sehingga $E = 0$. Dengan demikian

$$v^2 = \frac{g}{4L} x(2L - x) \quad (1)$$

B. Selanjutnya dari pers. (1) dapat dihitung derivatif terhadap waktu (t), yaitu

$$2v \frac{dv}{dt} = \frac{g}{4L} \left(2L \frac{dx}{dt} - 2x \frac{dx}{dt} \right)$$

sehingga

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{4L} (L - x) \quad \text{atau} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{g}{4L} (L - x)$$

Artinya, persamaan gerak ujung bebas tali untuk pergeseran x adalah

$$\frac{d^2}{dt^2}(x-L) + \frac{g}{4L}(x-L) = 0$$

yang tidak lain adalah persamaan gerak osilasi harmonik sederhana di sekitar titik $x = L$. Dengan demikian, besar periode osilasi adalah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4L}{g}} = 4\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

dan karena $v = 0$ untuk $x = 0$ maka amplitudo osilasi adalah L .

3.

A. Jika kecepatan sudut cincin adalah ω , maka energi kinetik translasi cincin adalah

$$EK_T = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2$$

Energi kinetik rotasi cincin adalah:

$$EK_R = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2$$

Energi kinetik total: $EK = M R^2 \omega^2$

Energi potensial: $EP = -M g R \cos \theta$

Bandingkan hasil ini dengan bandul sederhana (yang memiliki energi kinetik: $EK = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2$

dan energi potensial $EP = -M g R \cos \theta$, periode diberikan oleh $T = 2\pi \sqrt{\frac{M R^2}{M g R}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$).

Sehingga periode osilasi sistem ini diberikan oleh $T = 2\pi \sqrt{\frac{2 M R^2}{M g R}} = 2\pi \sqrt{\frac{2 R}{g}}$

Jika menggunakan metode gaya/torka:

Momen inersia terhadap titik O: $I_{cm} + MR^2 = 2 MR^2$

Torka terhadap titik O:

$$-M g R \sin \theta = 2 M R^2 \alpha_\theta$$

Sederhanakan: $\alpha_\theta + \frac{g}{2R} \sin \theta = 0$

Untuk amplitudo sudut kecil ($\sin \theta \approx \theta$), periode osilasi diberikan oleh $T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$

B.

i. Perhatikan gambar. Busur AB = busur A'B' = $r\theta$.

$$\varphi = \theta - \frac{A'B'}{R} = \theta \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

ii. Jika laju perubahan sudut θ adalah ω_θ , maka energi kinetik translasi cincin adalah

$$EK_T = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M (R-r)^2 \omega_\theta^2$$

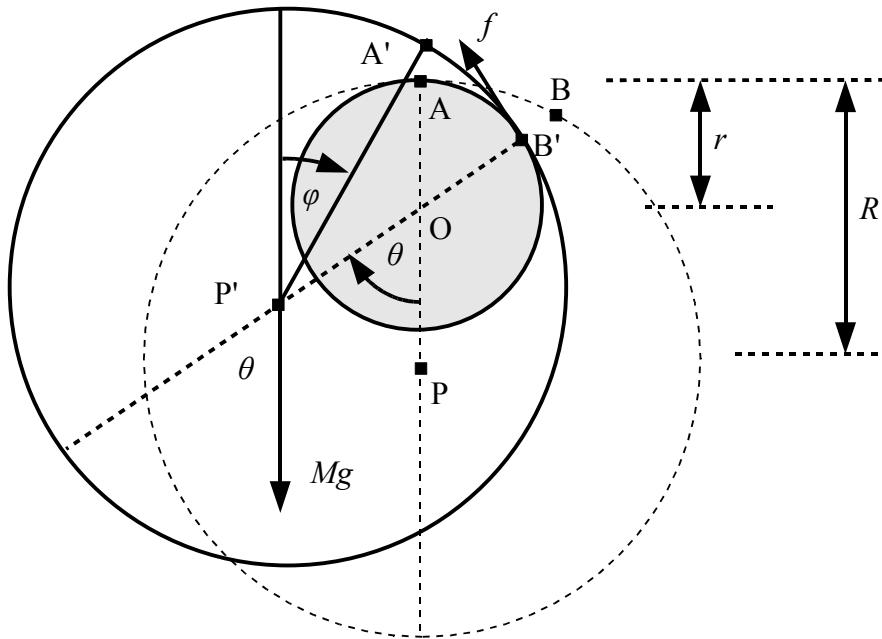
Energi kinetik rotasi cincin adalah:

$$EK_R = \frac{1}{2} I \omega_\varphi^2 = \frac{1}{2} M R^2 \omega_\theta^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} M (R-r)^2 \omega_\theta^2$$

Energi kinetik total: $EK = M (R-r)^2 \omega_\theta^2$

Energi potensial: $EP = -M g (R-r) \cos \theta$

Jadi periode osilasi diberikan oleh $T = 2\pi \sqrt{\frac{2M(R-r)^2}{Mg(R-r)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}$



Jika menggunakan metode gaya/torka:

Tinjau gaya dalam arah tegak lurus P'B'

$$-M g \sin \theta + f = M (R-r) \alpha_\theta$$

Persamaan gerak rotasi terhadap pusat cincin:

$$-f R = M R^2 \alpha_\varphi$$

Gunakan hubungan pada bagian i:

$$\alpha_\varphi = \alpha_\theta \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

Gabungkan ketiga persamaan ini, didapat

$$-M g \sin \theta = 2 M (R-r) \alpha_\theta$$

sederhanakan:
$$\alpha_\theta + \frac{g}{2(R-r)} \sin \theta = 0$$

Untuk amplitudo sudut kecil ($\sin \theta \approx \theta$), periode osilasi diberikan oleh
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}$$

iii. Jika r menuju nol didapat
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

C.

i.
$$\varphi = \theta \left(1 - \frac{r}{R}\right) + \beta \frac{r}{R}$$

ii. Untuk mencari hubungan sudut-sudut ini, tinjau gerak rotasi kedua cincin. Ada gaya gesek antara kedua cincin.

Persamaan gerak rotasi cincin besar:
$$-f R = M R^2 \alpha_\varphi$$

Persamaan gerak rotasi cincin kecil:
$$f r = m r^2 \alpha_\beta$$

Eliminasi gaya gesek f , didapat
$$M R \alpha_\varphi + m r \alpha_\beta = 0$$

sehingga hubungan kecepatan sudut diberikan oleh:
$$M R \omega_\varphi + m r \omega_\beta = 0$$

Dari hubungan sudut dari bagian i, didapat
$$\omega_\varphi = \omega_\theta \left(1 - \frac{r}{R}\right) + \omega_\beta \frac{r}{R}$$

Gabungkan kedua hubungan kecepatan sudut ini:

$$\omega_\varphi = \frac{m}{m+M} \omega_\theta \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

dan
$$\omega_\beta = -\frac{M}{m+M} \omega_\theta \frac{R}{r} \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

Energi kinetik rotasi cincin besar:
$$\frac{1}{2} M R^2 \omega_\varphi^2 = \frac{m^2 M}{2(m+M)^2} \omega_\theta^2 (R-r)^2$$

Energi kinetik rotasi cincin kecil:
$$\frac{1}{2} m r^2 \omega_\beta^2 = \frac{m M^2}{2(m+M)^2} \omega_\theta^2 (R-r)^2$$

Energi kinetik translasi cincin besar:
$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M (R-r)^2 \omega_\theta^2$$

$$\text{Energi kinetik total: } \frac{mM}{2(m+M)} \omega_{\theta}^2 (R-r)^2 + \frac{1}{2} M \omega_{\theta}^2 (R-r)^2 = \frac{1}{2} M \omega_{\theta}^2 (R-r)^2 \frac{2m+M}{m+M}$$

$$\text{Energi potensial: } EP = -Mg(R-r) \cos \theta$$

$$\text{Jadi periode osilasi diberikan oleh } T = 2\pi \sqrt{\frac{M(R-r)^2 \frac{2m+M}{m+M}}{Mg(R-r)}} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{R-r}{g}\right) \frac{2m+M}{m+M}}$$

Jika menggunakan metode gaya/torka:

Tinjau gaya dalam arah tegak lurus P'B'

$$-Mg \sin \theta + f = M(R-r) \alpha_{\theta}$$

Persamaan gerak rotasi sudah diberikan pada bagian pembahasan energi:

$$-fR = MR^2 \alpha_{\theta}$$

$$fr = mr^2 \alpha_{\theta}$$

Gabungkan hasil ini dengan persamaan pada bagian i: didapat:

$$f = -\frac{mM}{m+M} \alpha_{\theta} (R-r)$$

Masukkan ini ke persamaan gaya:

$$-Mg \sin \theta = \frac{mM}{m+M} \alpha_{\theta} (R-r) + M(R-r) \alpha_{\theta}$$

Sederhanakan:

$$\alpha_{\theta} + \frac{g}{R-r} \frac{m+M}{2m+M} \sin \theta = 0$$

$$\text{Untuk amplitudo sudut kecil } (\sin \theta \approx \theta), \text{ didapat } T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{R-r}{g}\right) \frac{2m+M}{m+M}}$$

$$\text{iii. Untuk limit } m \text{ besar, didapat } T = 2\pi \sqrt{\frac{2(R-r)}{g}} .$$

4.

- A. Tanpa ada medan magnet, muatan 1 akan bergerak ke kiri (sumbu y negatif). Agar muatan berbelok ke atas, dibutuhkan medan magnet \mathbf{B}_1 ke luar bidang kertas (sumbu x positif). Demikian juga dengan muatan 2, tanpa medan magnet, muatan 2 akan bergerak ke kanan (sumbu y positif). Agar muatan 2 berbelok ke atas, dibutuhkan medan magnet \mathbf{B}_2 masuk ke bidang kertas (sumbu x negatif).

B. Gaya yang bekerja pada muatan 1: $\mathbf{F}_1 = -\frac{kq^2}{(2y)^2} \hat{y} - Bqv_{1,y} \hat{z} + Bqv_{1,z} \hat{y}$

Gaya yang bekerja pada muatan 2: $\mathbf{F}_2 = \frac{kq^2}{(2y)^2} \hat{y} + Bqv_{2,y} \hat{z} - Bqv_{2,z} \hat{y}$

dengan \hat{y} dan \hat{z} berturut-turut adalah vektor satuan yang menyatakan arah y positif dan arah z positif.

Persamaan gerak muatan 2:

sumbu y : $ma_{2,y} = \frac{kq^2}{4y^2} - Bqv_{2,z}$

sumbu z : $ma_{2,z} = Bqv_{2,y}$

C. Energi mekanik kekal, karena medan magnet tidak bisa mengerjakan usaha.

D. Persamaan energi: $\frac{kq^2}{2d} = \frac{kq^2}{2y} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 \right)$.

Faktor 2 dimasukkan karena energi kinetik kedua muatan sama besar.

Untuk mencari ukuran kotak, kita butuh kecepatan dalam arah y sama dengan nol saat jarak kedua muatan adalah $2L$.

Untuk mencari kecepatan dalam arah z , kita hanya butuh melakukan integral sederhana yaitu dari

persamaan $ma_{2,z} = Bqv_{2,y}$ atau $m \frac{dv_{2,z}}{dt} = Bq \frac{dy_2}{dt}$ sehingga $mdv_{2,z} = Bq dy_2$.

Karena kecepatan mula-mula dalam arah z adalah nol, saat $y = d$, maka didapat

$$mv_z = Bq(L-d)$$

Gunakan hasil ini pada persamaan energi, didapat

$$\frac{kq^2}{2d} = \frac{kq^2}{2L} + m \left(\frac{Bq(L-d)}{m} \right)^2$$

Sederhanakan: $\frac{k}{2} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{L} \right) = \frac{B^2(L-d)^2}{m}$

atau $\frac{km}{2B^2} = (L-d)Ld$

Selesaikan persamaan kuadrat ini, didapat $L = \frac{d}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2km}{B^2d^3}} \right]$

Ambil solusi positif: $L = \frac{d}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2km}{B^2d^3}} \right]$