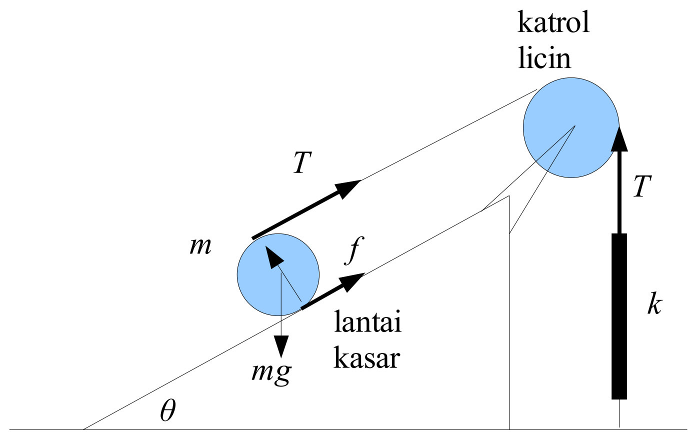
1.

a) Kesetimbangan silinder m:



sejajar bidang miring

$$T + f - mg \sin\theta = 0 \quad , \qquad (1)$$

tegak lurus bidang miring

$$N - mg\cos\theta = 0 \quad , \qquad (2)$$

torka terhadap pusat silinder:

$$TR - fR = 0 \quad . \qquad (3)$$

Dari persamaan (3) didapat $T=f$. (4)

Substitusi ini ke persamaan (1), didapat $T = \frac{1}{2} mg \sin\theta$. (5)

Pada pegas berlaku hubungan $T = k\,\Delta L$, (6)

sehingga didapat $\Delta L = \frac{mg\sin\theta}{2k}$. (7)

b) Dari persamaan (4) dan (5) didapat $f = \frac{1}{2} mg \sin\theta$. (8)

Dalam keadaan hampir terpleset, hubungan f dan N diberikan oleh $f = \mu N$. (9)

Dari persamaan (2) didapat $N = mg\cos\theta$. (10)

Dengan menggunakan persamaan (8), (9) dan (10) didapat

$$\mu = \frac{1}{2}\tan\theta \quad . \qquad (11)$$

c) Pertama tinjau sistem dalam keadaan setimbang. Pegas bertambah panjang sebanyak ΔL.

Kemudian beri simpangan tambahan Δx.

Pada saat osilasi, persamaan gerak silinder diberikan oleh:

sejajar bidang miring

$$T + f - mg\sin\theta = ma_m \quad , \qquad (12)$$

tegak lurus bidang miring

$$N - mg\cos\theta = 0 \quad , \qquad (13)$$

torka terhadap pusat silinder:

$$TR - fR = I\alpha \quad , \qquad (14)$$

dengan $I = ½\, mR^2$. (15)

Hubungan percepatan sudut dan percepatan linear:

$$a_m = \alpha R \quad . \qquad (16)$$

Di sisi lain kita mempunyai hubungan: penambahan panjang karet Δx = 2 kali pergeseran silinder Δs, tetapi berlawanan arah. Sehingga percepatan silinder a_m= -½ percepatan pertambahan panjang karet = - ½ $a_{\Delta x}$,

$$a_m = -\frac{1}{2} a_{\Delta x} \quad . \tag{17}$$

Dari hukum Hooke, diperoleh hubungan $T = k(\Delta L + \Delta x)$. (18)

Dari persamaan (12), (14), (15) dan (16) di atas, didapat

$$2T - mg\sin\theta = \frac{3}{2} m a_m \quad . \tag{19}$$

Masukkan persamaan (17) dan (18) ke persamaan (19)

$$2k(\Delta L + \Delta x) - mg\sin\theta = -\frac{3}{4} m a_{\Delta x} \quad . \tag{20}$$

Dengan menggunakan persamaan (7) ke persamaan (20), didapat

$$2k\Delta x = -\frac{3}{4} m a_{\Delta x} \quad . \tag{21}$$

Sederhanakan $a_{\Delta x} + \frac{8}{3}\frac{k}{m}\Delta x = 0$. (22)

Dengan membandingkan dengan persamaan osilasi sederhana didapat

$$\omega = \sqrt{\frac{8k}{3m}} \tag{23}$$

Periode osilasi diberikan oleh $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{8k}}$ (24)

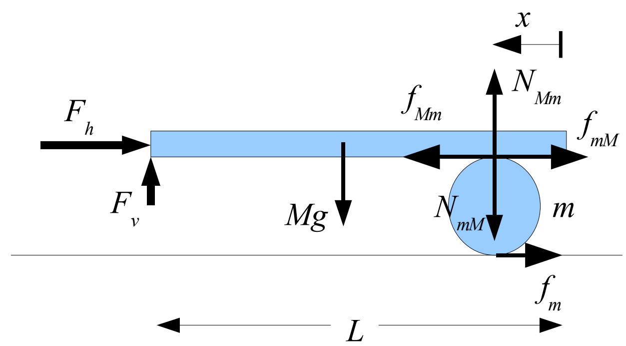
d) Syarat agar tali selalu tegang adalah *T* selalu lebih besar atau sama dengan nol.

$$T \geq 0 \tag{25}$$

Dari persamaan (18) dan (7) didapat $A = \Delta L = \frac{mg\sin\theta}{2k}$ (26)

2.

a) Gaya yang bekerja pada batang dalam arah horizontal:



$$F_h - f_{Mm} = M\, a_M \quad , \qquad (1)$$

arah vertikal

$$F_v + N_{Mm} - Mg = 0 \quad , \qquad (2)$$

torka terhadap titik kontak:

$$F_v (L - x) - Mg\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \quad . \qquad (3)$$

Gaya yang bekerja pada silinder dalam arah horizontal:

$$f_{mM} + f_m = m\, a_m \quad , \qquad (4)$$

torka terhadap pusat silinder:

$$f_{mM} R - f_m R = I\, \alpha \quad . \qquad (5)$$

Sekarang gunakan hubungan pergeseran *m* dan pergeseran *M*. Jika *m* bergeser sejauh *x*, maka *M* bergeser sejauh 2*x*. Jadi

$$a_m = ½\, a_M. \qquad (6)$$

Masukkan harga $I = ½\, mR^2$, (7)

dan $\alpha = \frac{a_m}{R}$, (8)

ke dalam persamaan (5),

$$f_{mM} - f_m = \frac{1}{2} m\, a_m \quad , \qquad (9)$$

kemudian eliminasi f_m dengan menggunakan persamaan (4)

$$f_{mM} = \frac{3}{4} m\, a_m \quad . \qquad (10)$$

Substitusi persamaan (10) ke persamaan (1), dan gunakan persamaan (6), diperoleh hasil akhir

$$F_h = \left(\frac{3}{8} m + M\right) a_M \quad . \qquad (11)$$

Percepatan *M* diberikan oleh:

$$a_M = \frac{F_h}{\frac{3}{8} m + M} \quad . \qquad (12)$$

b) Percepatan relatif antara batang M dan silinder m adalah

$$a_{Mm} = a_M - a_m = \tfrac{1}{2}\, a_M. \tag{13}$$

Untuk menempuh jarah $L/2$ dibutuhkan waktu:

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\frac{F_h}{2\left(\frac{3}{8}m + M\right)}T^2 \tag{14}$$

Didapat waktu

$$T = \sqrt{\frac{2\,L}{F_h}\left(\frac{3}{8}m + M\right)} \tag{15}$$

c) Dari persamaan (3) didapat

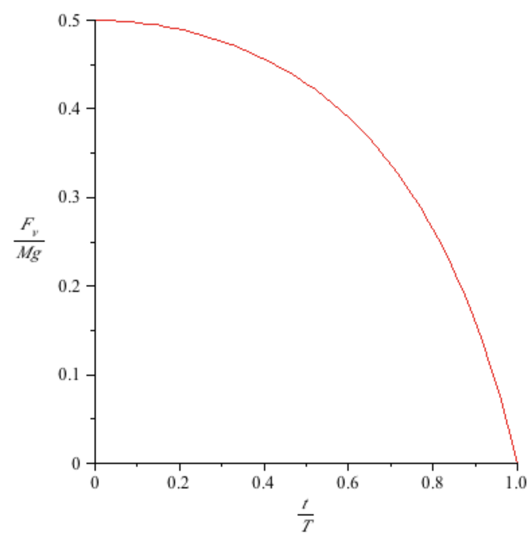
$$F_v = \frac{Mg\left(\frac{L}{2} - x\right)}{L - x} \quad . \tag{16}$$

Masukkan fungsi x

$$x = \frac{1}{2}\frac{F_h}{2\left(\frac{3}{8}m + M\right)}t^2 \quad , \tag{17}$$

didapat

$$F_v = \frac{Mg\left(\frac{L}{2} - \frac{F_h t^2}{4\left(\frac{3}{8}m + M\right)}\right)}{L - \frac{F_h t^2}{4\left(\frac{3}{8}m + M\right)}} \quad . \tag{18}$$



Sekarang substitusi $\quad \tau = \dfrac{t}{T} \quad ,$ (19)

didapat $\quad \dfrac{F_v}{Mg} = \dfrac{1 - \tau^2}{2 - \tau^2} \quad .$ (20)

Sketsa fungsi $\dfrac{F_v(t)}{Mg}$ terhadap $\tau = \dfrac{t}{T}$ diberikan pada gambar di samping.

d) Perpindahah batang = L.

Usaha gaya horizontal : $\quad W = F_h . L$ (21)

Energi kinetik batang :

$$K_M = \frac{1}{2}M\, v_m^2 = \frac{1}{2}M\,(a_M T)^2 \tag{22}$$

$$K_M = F_h L \frac{M}{\frac{3}{8}m + M} \tag{23}$$

Energi kinetik silinder:

$$K_m = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{3}{4} m v_m^2 \tag{24}$$

$$K_m = F_h L \frac{\frac{3}{8}m}{\frac{3}{8}m + M} \tag{25}$$

Energi kinetik total sistem:

$$K = K_M + K_m = F_h L \tag{26}$$

Jadi usaha gaya horizontal sama dengan energi kinetik batang ditambah energi kinetik silinder.

3.

a) Gunakan hukum kekekalan energi:

$$Mgh - mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} M v^2 \quad . \tag{1}$$

Sederhanakan,

$$v = \sqrt{2gh \frac{M-m}{m+M}} \tag{2}$$

b) Tumbukan ini dapat dipandang sebagai tumbukan lenting sempurna antara dua massa: massa $m+M$ yang bergerak dengan kecepatan v menabrak massa m_0 yang mula-mula diam.

Karena proses tumbukan singkat, maka selama proses tumbukan, gravitasi bisa diabaikan, sehingga momentum linear dan energi sistem kekal.

Sebelum tumbukan, dalam kerangka lab:

$m + M$ bergerak ke atas dengan kecepatan v.

m_0 diam.

pusat massa bergerak ke atas dengan kecepatan $\frac{m+M}{m+M+m_0} v$ (3)

Sebelum tumbukan dalam kerangka pusat massa:

$m + M$ bergerak ke atas dengan kecepatan $v - \frac{m+M}{m+M+m_0} v = \frac{m_0}{m+M+m_0} v$ (4)

m_0 bergerak ke bawah dengan kecepatan $0 - \frac{m+M}{m+M+m_0} v = -\frac{m+M}{m+M+m_0} v$ (5)

pusat massa diam : $\frac{m+M}{m+M+m_0} v - \frac{m+M}{m+M+m_0} v = 0$ (6)

Setelah tumbukan dalam kerangka pusat massa:

$m+ M$ bergerak ke bawah dengan kecepatan $-\frac{m_0}{m+M+m_0} v$ (7)

m_0 bergerak ke atas dengan kecepatan $\frac{m+M}{m+M+m_0} v$ (8)

pusat massa diam

Setelah tumbukan dalam kerangka lab:

$m + M$ bergerak dengan kecepatan $-\frac{m_0}{m+M+m_0} v + \frac{m+M}{m+M+m_0} v = \frac{m+M-m_0}{m+M+m_0} v$ (9)

m_0 bergerak dengan kecepatan $\frac{m+M}{m+M+m_0} v + \frac{m+M}{m+M+m_0} v = \frac{2(m+M)}{m+M+m_0} v$ (10)

Jadi kecepatan m_0 adalah $v'_{m_0}=\frac{2(m+M)}{m+M+m_0}\sqrt{2gh\frac{M-m}{M+m}}$ ke atas (11)

dan kecepatan m adalah $v'_m=\frac{m+M-m_0}{m+M+m_0}\sqrt{2gh\frac{M-m}{M+m}}$ ke atas jika $m+M>m_0$. (12)

c) Pada saat massa m_0 kanan bergerak ke atas, tali menjadi kendor. Tali menjadi tegang lagi saat perpindahan massa m_0 kanan dan m_0 kiri menjadi sama.

Syarat agar laju sama: $v'_{m_0}t-\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}gt^2$ (13)

Didapat $t=\frac{v'_{m_0}}{g}$ (14)

dengan memasukkan hasil sebelumnya didapat $t=\frac{2(m+M)}{m+M+m_0}\sqrt{\frac{2h}{g}\frac{M-m}{M+m}}$ (15)

4.

a) Energi sistem kekal saat transisi massa m_a menaiki sisi AB.

Energi kinetik mula mula massa m_a = $\frac{1}{2} m_a v_0^2$ (1)

Energi kinetik akhir massa m_a = $\frac{1}{2} m_a \left((v_1 \cos\alpha + v_2)^2 + (v_1 \sin\alpha)^2 \right)$ (2)

Energi kinetik akhir massa m_b = $\frac{1}{2} m_b v_2^2$ (3)

Kekekalan energi: $\frac{1}{2} m_a v_0^2 = \frac{1}{2} m_a \left((v_1 \cos\alpha + v_2)^2 + (v_1 \sin\alpha)^2 \right) + \frac{1}{2} m_b v_2^2$ (4)

Kekekalan momentum arah horizontal: $m_a v_0 = m_a (v_1 \cos\alpha + v_2) + m_b v_2$ (5)

dari persamaan (5) didapat

$$v_2 = \frac{m_a (v_0 - v_1 \cos\alpha)}{m_a + m_b} \quad (6)$$

Substitusikan persamaan (6) ke persamaan (4), sederhanakan, didapat

$$v_1 = \sqrt{\frac{m_b}{m_a \sin^2\alpha + m_b}}\, v_0 \quad (7)$$

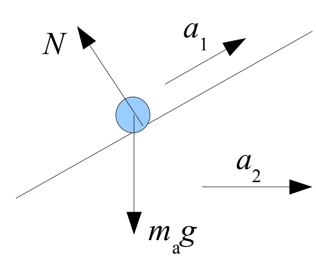
b) Persamaan gerak massa m_a :

arah sejajar AB: $-m_a g \sin\alpha = m_a (a_1 + a_2 \cos\alpha)$ (8)

arah tegak lurus AB: $N - m_a g \cos\alpha = -m_a a_2 \sin\alpha$ (9)

Persamaan gerak massa m_b :

arah horizontal: $N \sin\alpha = m_b a_2$ (10)



Gunakan persamaan (10) dan persamaan (9), didapat

$$a_2 = \frac{m_a \sin\alpha \cos\alpha}{m_a \sin^2\alpha + m_b} g \quad (11)$$

Gunakan persamaan (11) pada persamaan (8), didapat

$$a_1 = -\frac{m_a + m_b}{m_a \sin^2\alpha + m_b} g \sin\alpha \quad (12)$$

c) Syarat agar bisa mencapai titik B: kecepatan massa m_a dan pasak m_b sama saat m_a ada di titik B.

Momentum linear arah horizontal kekal: $m_a v_{0,min} = m_a v_B + m_b v_B$ (13)

Kekekalan energi: $\frac{1}{2} m_a v_{0,min}^2 = \frac{1}{2} m_a v_B^2 + \frac{1}{2} m_b v_B^2 + m_a g\, l \sin\alpha$ (14)

Gunakan persamaan (13) pada persamaan (14), didapat

$$v_{0,\,min}=\sqrt{\frac{2(m_a+m_b)}{m_b}g\,l\sin\alpha} \tag{15}$$

d) waktu yang dibutuhkan diberikan oleh persamaan (7), (12) dan (15).

$$t_{naik}=\frac{v_1}{-a_1}=\sqrt{\frac{m_b}{m_a\sin^2\alpha+m_b}\frac{2(m_a+m_b)}{m_b}g\,l\sin\alpha\frac{(m_a\sin^2\alpha+m_b)^2}{(m_a+m_b)^2}\frac{1}{g^2\sin^2\alpha}} \tag{16}$$

sederhanakan

$$t_{naik}=\sqrt{\frac{m_a\sin^2\alpha+m_b}{m_a+m_b}\frac{2l}{g\sin\alpha}} \tag{17}$$

e) Jika massa m_a tidak berhasil melewati m_b maka proses yang terjadi adalah seperti tumbukan lenting sempurna antara kedua massa tersebut. Ada berbagai cara untuk mendapatkan hasil akhir kecepatan untuk proses tumbukan lenting sempurna. Di sini, solusi akan diperoleh dengan menggunakan kerangka pusat massa sistem.

Kecepatan pusat massa : $v_{cm}=\frac{m_a v_0}{m_a+m_b}$ (18)

Kecepatan mula-mula m_a dalam frame pusat massa: $v_0-\frac{m_a v_0}{m_a+m_b}=\frac{m_b v_0}{m_a+m_b}$ (19)

Kecepatan mula-mula m_b dalam frame pusat massa: $0-\frac{m_a v_0}{m_a+m_b}=\frac{-m_a v_0}{m_a+m_b}$ (20)

Kecepatan akhir m_a dalam frame pusat massa: $\frac{-m_b v_0}{m_a+m_b}$ (21)

Kecepatan akhir m_b dalam frame pusat massa: $\frac{m_a v_0}{m_a+m_b}$ (22)

Kecepatan akhir m_a dalam frame lab: $\frac{m_a-m_b}{m_a+m_b}v_0$ (23)

Kecepatan akhir m_b dalam frame lab: $\frac{2m_a}{m_a+m_b}v_0$ (24)

f) Jika kecepatan m_a relatif terhadap m_b di titik B hampir nol, maka proses m_a naik dari A ke B simetri dengan proses m_a turun dari B ke C. Jadi waktu turun sama dengan waktu naik.

$$t_{turun}=\sqrt{\frac{m_a\sin^2\alpha+m_b}{m_a+m_b}\frac{2l}{g\sin\alpha}} \tag{25}$$

g) Jika massa m_a berhasil melewati m_b maka proses yang terjadi bersifat simetri. Dari argumen ini, maka akan diperoleh kecepatan akhir dan awal akan semua sama.

Jadi kecepatan akhir m_a adalah v_0 dan kecepatan akhir m_b adalah nol.